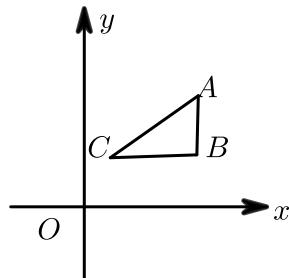


第3讲 动点问题和找规律（练习）

一、坐标系中的动点问题

1. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标系原点，已知 $A(4a, 4a)$ ， $B(4a, 2a)$ ， $C(a, 2a)(a > 0)$ ，

$$S_{\triangle ACB} = 12.$$



- (1) 求 a 的值.
- (2) 若点 P 从原点 O 出发，以2个单位长度/秒的速度沿着 x 轴的正半轴方向运动，当运动时间 t 为何值时， $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等？

【答案】 (1) $a = 2$.

(2) $t = 1$ 或 $7s$.

【解析】 (1) $\because A(4a, 4a)$ ， $B(4a, 2a)$ ， $C(a, 2a)(a > 0)$ ，

$$\therefore AB = 2a, BC = 3a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 12,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3a = 12,$$

$$\text{解得 } a = 2 \text{ 或 } a = -2 \text{ (舍去)}.$$

(2) 延长 AB 到 D 交 x 轴于 D ，

$$\because a = 2,$$

$$\therefore A(8, 8), B(8, 4), C(2, 4),$$

$$\therefore D(8, 0),$$

$$AB = 4, OD = 8,$$

①当点 P 在点 D 左侧时，

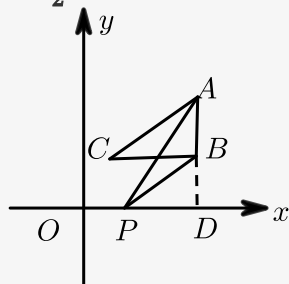
$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD = S_{\triangle ABC} = 12,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \cdot PD = 12,$$

$$\therefore PD = 6,$$

$$\therefore OP = OD - PD = 8 - 6 = 2,$$

$$\therefore t = \frac{2}{2} = 1s .$$



②当点P在D点右侧时，

$$\because S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD = S_{\triangle ABC} = 12 ,$$

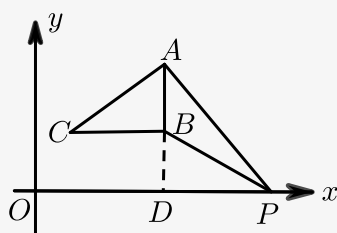
$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times PD = 12 ,$$

$$PD = 6 ,$$

$$\therefore OP = OD + DP = 8 + 6 = 14 ,$$

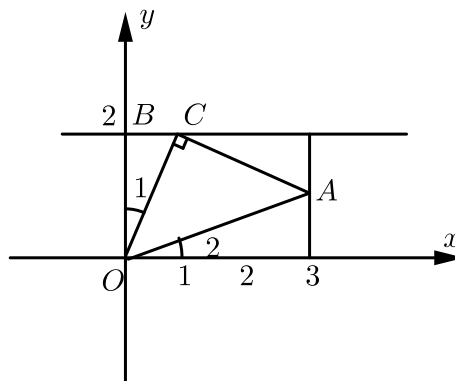
$$\therefore t = \frac{14}{2} = 7s .$$

综上 $t = 1$ 或 $7s$ 时， $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABC}$.



【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

2. 在平面直角系中， O 为原点， B 点坐标为 $(0, 2)$ ， A 点坐标 $(3, 1)$ ，直线 l 经过点 B 且平行于 x 轴， C 在直线 l 上以 0.5 个单位长度每秒的速度从 B 点出发沿直线 l 向右运动，当运动开始 $4s$ 时， C 点的坐标为_____，此时 $\triangle OAC$ 的面积是多少？如果 C 点继续运动，还能否得到 $\triangle OAC$ 与此此时面积相等的时刻？若能，请求出 C 点总共运动的时间，若不能请说明理由．



【答案】点 C 的坐标为 $(2, 2)$ ，总共运动 $20s$.

【解析】 $S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{8} = 2$,

还能得到 $\triangle OAC$ 面积为2的时刻,

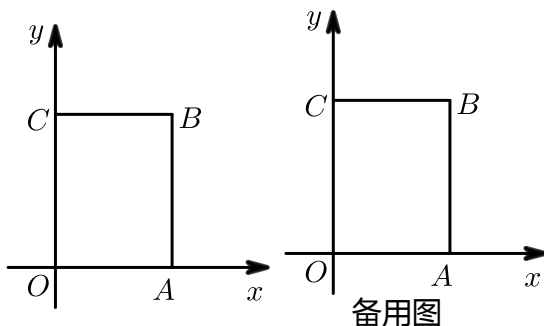
设:时间为 ts ,

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAC} &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{2}t - 3 \right) - \frac{1}{2} \times (2+1) \times 3 \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{4}t - 3 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore t = 20s.$$

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题(非函数)

3. 如图,在长方形 $OABC$ 中, O 为平面直角坐标系的原点,点 A 的坐标为 $(a,0)$,点 C 的坐标为 $(0,b)$ 且 a 、 b 满足 $\sqrt{a-4} + |b-6| = 0$,点 B 在第一象限内,点 P 从原点出发,以每秒2个单位长度的速度沿着 $O-C-B-A-O$ 的线路移动.



- (1) 点 B 的坐标为 ____ . 当点 P 移动3.5秒时,点 P 的坐标为 ____ .
 (2) 在移动过程中,当点 P 到 x 轴的距离为4个单位长度时,求点 P 移动的时间.
 (3) 在 $O-C-B$ 的线路移动过程中,是否存在点 P 使 $\triangle OBP$ 的面积是10,若存在求出点 P 移动的时间;若不存在,请说明理由.

【答案】 (1) $(4,6)$; $(1,6)$

(2) 2秒或6秒.

(3) 存在, $\frac{5}{2}s$ 或 $\frac{10}{3}s$.

【解析】 (1) $\because \sqrt{a-4} + |b-6| = 0$,

$$\therefore a-4=0, b-6=0,$$

$$\text{解得 } a=4, b=6,$$

$$\therefore OA=4, OC=6,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标是 } (4,6),$$

$\because$ 点 P 从原点出发,以每秒2个单位长度的速度沿着 $O-C-B-A-O$ 的线路移动,

$$\therefore 2 \times 3.5 = 7,$$

$\because OA = 4, OC = 6,$

$\therefore$ 当点 P 移动3.5秒时, 在线段 CB 上, 离点 C 的距离是: $7 - 6 = 1,$

即当点 P 移动3.5秒时, 此时点 P 在线段 CB 上, 离点 C 的距离是21单位长度, 点 P 的坐标是(1, 6) .

故答案为: (4, 6), (1, 6) .

(2) 由题意可得, 在移动过程中, 当点 P 到 x 轴的距离为4个单位长度时, 存在两种情况,

第一种情况, 当点 P 在 OC 上时,

点 P 移动的时间是: $4 \div 2 = 2$ 秒,

第二种情况, 当点 P 在 BA 上时 .

点 P 移动的时间是: $(6 + 4 + 2) \div 2 = 6$ 秒,

故在移动过程中, 当点 P 到 x 轴的距离为4个单位长度时, 点 P 移动的时间是2秒或6秒 .

(3) 如图1所示,

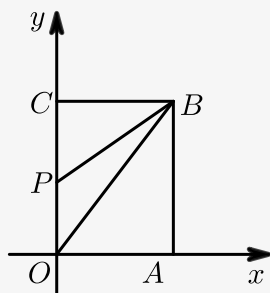


图1

当点 P 在线段 OC 上时,

$\because \triangle OBP$ 的面积= 10 ,

$$\therefore \frac{1}{2}OP \cdot BC = 10 ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4 \times OP = 10 ,$$

解得 $OP = 5,$

$$\therefore \text{此时 } t = \frac{5}{2} \text{ s} ;$$

如图2所示,

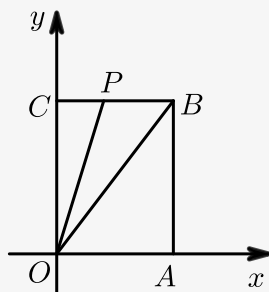


图2

当点 P 在 CB 上时,

$\therefore \triangle OBP$ 的面积=10,

$$\therefore \frac{1}{2}PB \cdot OC = 10,$$

$$\text{即: } \frac{1}{2} \times 6 \times PB = 10,$$

$$\therefore PB = \frac{10}{3},$$

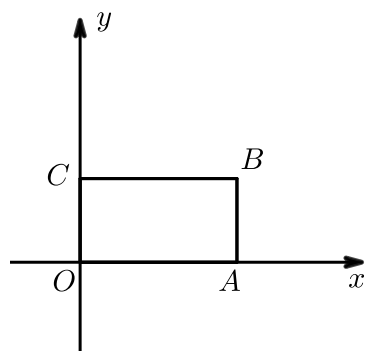
$$\text{解得 } CP = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{此时 } t = \left(6 + \frac{2}{3}\right) \div 2 = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

综上所述, 存在点 P 使 $\triangle OBP$ 的面积是10, 满足条件的的时间 t 的值为 $\frac{5}{2}$ s或 $\frac{10}{3}$ s.

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题(非函数)

4. 如图, 在平面直角坐标系中, 长方形 $OABC$ 的顶点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上, $CB \parallel x$ 轴, $BA \perp x$ 轴, 点 B 的坐标为 (a, b) , 且 $b = \sqrt{a-8} + \sqrt{8-a} + 4$.



- (1) 请直接写出点 A 、 B 、 C 的坐标.
- (2) 若动点 P 从原点 O 出发, 沿 x 轴以每秒2个长度单位的速度向右运动, 在运动过程中形成的三角形 OPC 的面积是长方形 $OABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$ 时, 点 P 停止运动, 求点 P 的运动时间.
- (3) 在(2)的条件下, 在 y 轴上是否存在一点 Q , 连接 PQ , 使三角形 CPQ 的面积与长方形 $OABC$ 的面积相等? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $A(8, 0)$, $B(8, 4)$, $C(0, 4)$.

(2) 点 P 运动时间为2秒.

(3) 存在; $Q(0, -12)$ 或 $(0, 20)$.

【解析】(1) $\because b = \sqrt{a-8} + \sqrt{8-a} + 4$,

$$\therefore \begin{cases} a-8 \geq 0 \\ 8-a \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 8,$$

$$\therefore b = 4,$$

$$\therefore B(8, 4),$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是长方形, $CB \parallel x$ 轴, $AB \perp x$ 轴,

$$\therefore A(8, 0), C(0, 4).$$

$$(2) \because A(8, 0), C(0, 4),$$

$$\therefore OA = 8, OC = 4,$$

$$\therefore S_{\text{长方形}OABC} = OA \cdot OC = 8 \times 4 = 32,$$

设运动时间为 t ,

$$\text{由题意得 } OP = 2t,$$

$$S_{\triangle OPC} = \frac{1}{4} S_{\text{长方形}OABC} = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OP \cdot OC,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot 4 = 8,$$

$$t = 2 \text{ (秒)},$$

$\therefore$ 点 P 运动时间为2秒.

$$(3) \text{ 由 } (2) \text{ 知 } OP = 4,$$

$$S_{\text{长方形}OABC} = 32,$$

设 $Q(0, y)$,

$$\therefore C(0, 4),$$

$$\therefore CQ = |4 - y|,$$

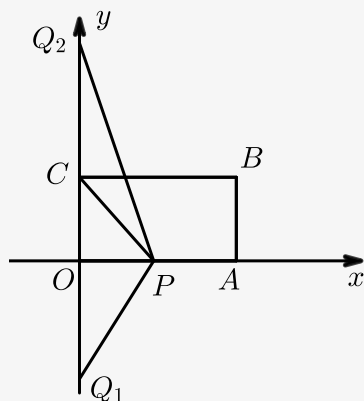
$$\therefore S_{\triangle CPQ} = \frac{1}{2} \cdot CQ \cdot OP = 32,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} |4 - y| \cdot 4 = 32,$$

$$|4 - y| = 16,$$

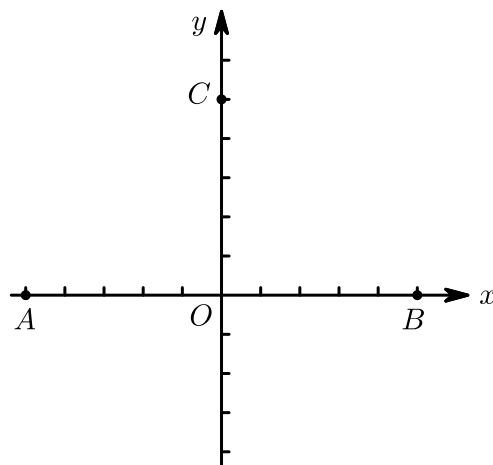
$$y = 20 \text{ 或 } y = -12,$$

$$\therefore Q(0, -12) \text{ 或 } (0, 20).$$



【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

5. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-5, 0)$ ， $B(5, 0)$ ， $C(0, 5)$ ，动点 P 从 B 点出发以每秒1个单位的速度沿 BA 方向运动，同时点 Q 从 C 点出发以每秒1个单位的速度沿 y 轴正半轴方向运动（当点 P 到达点 A 时两个点都停止运动）。设从出发起运动了 x 秒，



- (1) 当 $x = 1$ 时, 求三角形 APQ 的面积.
- (2) 当 $x = 2$ 时, y 轴上是否存在一点 E , 使得三角形 AQE 的面积与三角形 APQ 的面积相等? 若存在, 求点 E 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) 27

(2) 存在点 $E(0, 18.2)$ 或 $E(0, -4.2)$, 使得三角形 AQE 的面积与三角形 APQ 的面积相等.

【解析】 (1) 由已知得: P 的坐标为 $(5-x, 0)$, Q 的坐标为 $(0, 5+x)$, $(0 \leq x \leq 10)$,

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times |5-x-(-5)| \times |5+x| = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27.$$

$$(2) \text{ 当 } x = 2 \text{ 时, } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28,$$

设存在点 $E(0, y)$,

$$\text{则 } S_{\triangle AQE} = \frac{1}{2} \times 5 \times |5+2-y| = 28,$$

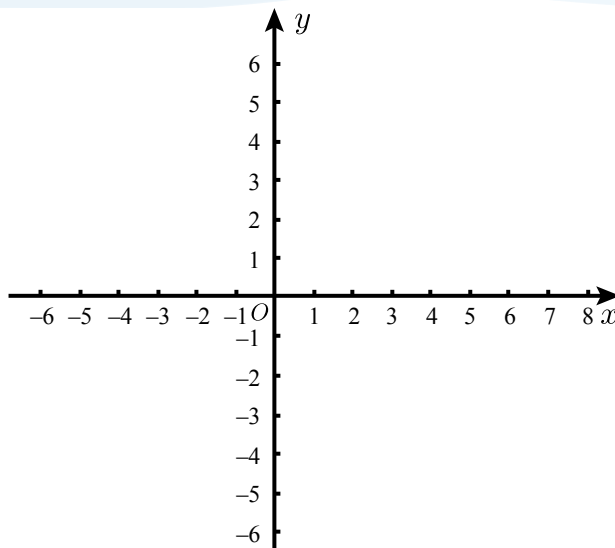
$$\therefore |7-y| = 11.2,$$

$$\text{解得 } y = 18.2 \text{ 或 } y = -4.2,$$

所以存在点 $E(0, 18.2)$ 或 $E(0, -4.2)$, 使得三角形 AQE 的面积与三角形 APQ 的面积相等.

【标注】 【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

6. 已知: 在平面直角坐标系中, 点 A 、 B 的坐标分别是 $(a, 0)$, $(b, 0)$, 且 $\sqrt{a+4} + |b-2| = 0$.



- (1) 求 a, b 的值 .
- (2) 在 y 轴上是否存在点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积是 12 ? 若存在 , 求出点 C 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .
- (3) 已知点 P 是 y 轴正半轴上一点 , 且到 x 轴的距离为 3 , 若点 P 沿 x 轴负半轴方向以每秒 1 个单位长度平移至点 Q , 当运动时间 t 为多少秒时 , 四边形 $ABPQ$ 的面积 S 为 15 个平方单位 ? 写出此时点 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $-4; 2$.

(2) $(0, 4)$ 或 $(0, -4)$, 证明见解析 .

(3) $(-4, 3)$.

【解析】 (1) 根据题意 , 得 $a + 4 = 0, b - 2 = 0$,

解得 $a = -4, b = 2$.

故答案为 : $-4; 2$.

(2) 存在 , 设点 C 到 x 轴的距离为 h ,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \times 6h = 12$, 解得 $h = 4$,

所以点 C 的坐标为 $(0, 4)$ 或 $(0, -4)$.

(3) 四边形 $ABPQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} (6 + PQ) \times 3 = 15$, 解得 $PQ = 4$.

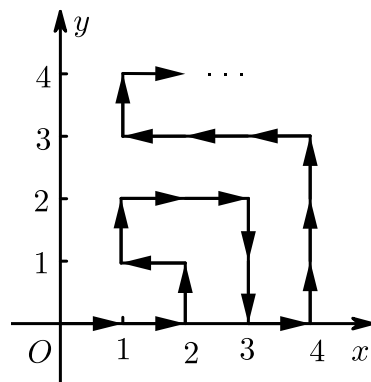
点 P 沿 x 轴负半轴方向以每秒 1 个单位长度平移至点 Q , 所以点 Q 的坐标为 $(-4, 3)$.

【标注】 【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

二、坐标系中的规律探究

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

9. 如图，在平面直角坐标系中，有若干个横坐标分别为整数的点，其顺序按图中“→”方向排列，如(1,0)，(2,0)，(2,1)，(1,1)，(1,2)，(2,2)，…根据这个规律，第2012个点的横坐标为_____。



【答案】45

【解析】以最外边的长方形边上的点为准，点的总个数等于该长方形右下角（即x轴上）的点的横坐标的平方。

$\because 45^2 = 2025$ ，45是奇数，

$\therefore$ 第2025个点是(45,0)，

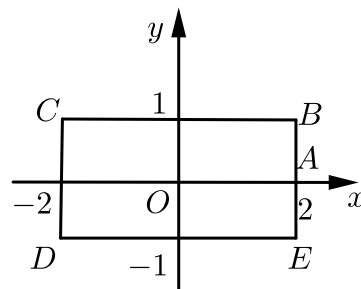
$\therefore$ 第2012个点是第2025个点向上数第13个点，

$\therefore$ 第2012个点的坐标是(45,13)，

$\therefore$ 第2012个点的横坐标是45。

【标注】【知识点】点坐标找规律

10. 如图，长方形BCDE的各边分别平行于x轴或y轴，物体甲和物体乙分别由点A(2,0)同时出发，沿长方形BCDE的边作环绕运动，物体甲按逆时针方向以1个单位/秒匀速运动，物体乙按顺时针方向以2个单位/秒匀速运动，则两个物体运动后的第2015次相遇地点的坐标是（ ）。



A. (2,0)

B. (-1,1)

C. (-2,1)

D. (-1,-1)

且当正方形最右下角点的横坐标为奇数时，这个点可以看做按照运动方向到达 x 轴，当正方形最右下角点的横坐标为偶数时，这个点可以看做按照运动方向离开 x 轴，

$$\because 45^2 = 2025,$$

$\therefore$ 第2025个点在 x 轴上坐标为(45, 0)，

则第2020个点在(45, 5)，

故选：A.

【标注】【知识点】点坐标找规律

三、坐标系中的新定义

12. 对点 (x, y) 的一次操作变换记为 $P_1(x, y)$ ，定义其变换法则如下： $P_1(x, y) = (x + y, x - y)$ ，且规定 $P_n(x, y) = P_1(P_{n-1}(x, y))$ （ n 为大于1的整数）. 如 $P_1(1, 2) = (3, -1)$ ， $P_2(1, 2) = P_1(P_1(1, 2)) = P_1(3, -1) = (2, 4)$ ， $P_3(1, 2) = P_1(P_2(1, 2)) = P_1(2, 4) = (6, -2)$. 则 $P_{2011}(1, -1) = ($
 $)$.
 A. $(0, 2^{1005})$ B. $(0, -2^{1005})$ C. $(0, -2^{1006})$ D. $(0, 2^{1006})$

【答案】D

【解析】 $P_1(1, -1) = (0, 2)$ ， $P_2(1, -1) = (2, -2)$

$$P_3(1, -1) = (0, 4)，P_4(1, -1) = (4, -4)$$

$$P_5(1, -1) = (0, 8)，P_6(1, -1) = (8, -8)$$

...

当 n 为奇数时， $P_n(1, -1) = (0, 2^{\frac{n+1}{2}})$ ，

$\therefore P_{2011}(1, -1)$ 应该等于 $(0, 2^{1006})$.

【标注】【知识点】定义新运算

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 的“识别距离”，给出如下定义：若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ，则点 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 的“识别距离”为 $|x_1 - x_2|$ ；若 $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$ ，则 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 的“识别距离”为 $|y_1 - y_2|$.
 (1) 已知点 $A(-1, 0)$ ， B 为 y 轴上的动点，
 ①若点 A 与 B 的“识别距离”为2，写出满足条件的 B 点的坐标. _____.
 ②直接写出点 A 与点 B 的“识别距离”的最小值 _____.

(2) 已知 C 点坐标为 $C(m, \frac{3}{4}m + 3)$, $D(0, 1)$, 求点 C 与 D 的“识别距离”的最小值及相应的 C 点坐标.

【答案】 (1) $(0, 2)$, $(0, -2)$; 1

(2) “识别距离”最小值为 $\frac{8}{7}$, $C(-\frac{8}{7}, \frac{15}{7})$.

【解析】 (1) ① $(0, 2)$ 、 $(0, -2)$;

②1.

(2) 由 $|m - 0| = \left| \frac{3}{4}m + 3 - 1 \right|$, 得 $m = 8$ 或 $m = -\frac{8}{7}$.

当 $m = 8$ 时, “识别距离”为8;

当 $m = -\frac{8}{7}$ 时, “识别距离”为 $\frac{8}{7}$.

$\therefore$ 当 $m = -\frac{8}{7}$ 时, “识别距离”最小值为 $\frac{8}{7}$, 相应 $C(-\frac{8}{7}, \frac{15}{7})$.

【标注】【知识点】解一元一次方程

【知识点】坐标与距离

【知识点】整式的加减运算

【能力】推理论证能力

14. 观察下列两个等式: $3 + 2 = 3 \times 2 - 1$, $4 + \frac{5}{3} = 4 \times \frac{5}{3} - 1$, 给出定义如下: 我们称使等式 $a + b = ab - 1$ 成立的一对有理数 a, b 为“椒江有理数对”, 记为 (a, b) , 如: 数对 $(3, 2)$, $(4, \frac{5}{3})$ 都是“椒江有理数对”.

(1) 数对 $(-2, 1)$, $(5, \frac{3}{2})$ 中是“椒江有理数对”的是_____.

(2) 若 $(a, 3)$ 是“椒江有理数对”, 求 a 的值.

(3) 若 (m, n) 是“椒江有理数对”, 则 $(-n, -m)$ _____“椒江有理数对”(填“是”、“不是”或“不确定”).

(4) 请再写出一对符合条件的“椒江有理数对”(注意: 不能与题目中已有的“椒江有理数对”重复)

【答案】 (1) $(5, \frac{3}{2})$

(2) $a = 2$.

(3) 不是

(4) $(-1, 0)$.

【解析】 (1) $-2 + 1 = -1$, $-2 \times 1 - 1 = -3$, $-1 \neq -3$.

$5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$, $5 \times \frac{3}{2} - 1 = \frac{13}{2}$.

(2) $a + 3 = 3a - 1$, $a = 2$.

(3) $m + n = mn - 1$,

$-m - n = -mn + 1$, $(-m)(-n) - 1 = mn - 1$,

∴不是 .

(4) 选一个数 : $a = -1$,

则 $-1 + b = -b - 1$, $b = 0$, $(-1, 0)$.

【标注】【知识点】与方程有关的新定义